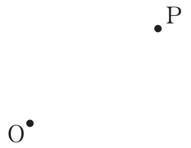
第 6 講　空間図形とベクトル

PART1　位置ベクトル

要点 ①　位置ベクトル

平面同様，空間においても，1 点 O を固定すると，この空間内の点 P の位置はベクトル $\overrightarrow{OP}=\vec{p}$ で表すことができる。

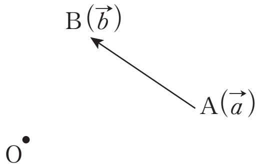


このとき，$\vec{p}$ を点 O に関する点 P の「　　　　　　」といい，位置ベクトルが $\vec{p}$ である点 P を「　　　」と表す。

また，空間内の 2 点 $A(\vec{a})$，$B(\vec{b})$ に対して

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=$$

と表される。



※空間内の位置ベクトルにおける点 O は，その空間内のどこに定めてもよい。

今後，特に断らない限り，点 O に関する位置ベクトルを考える。

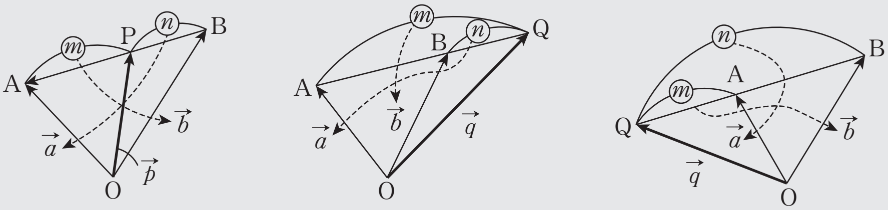
要点 ②　分点の位置ベクトル

平面同様，空間においても，次のことが成り立つ。

内分点・外分点の位置ベクトル

2 点 $A(\vec{a})$，$B(\vec{b})$ を結ぶ線分 AB を $m:n$ に内分する点 P の位置ベクトルを $\vec{p}$，$m:n$ に外分する点 Q の位置ベクトルを $\vec{q}$ とすると

$$\vec{p}=\frac{n\vec{a}+m\vec{b}}{m+n},\quad \vec{q}=\frac{-n\vec{a}+m\vec{b}}{m-n}=\frac{n\vec{a}-m\vec{b}}{-m+n}$$



$m>n$　　　$m<n$

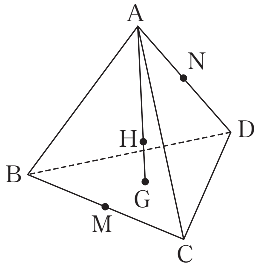
特に，線分 AB の中点 M の位置ベクトル $\vec{m}$ は　$\vec{m}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$

三角形の重心の位置ベクトル

3 点 A$(\vec{a})$，B$(\vec{b})$，C$(\vec{c})$ を頂点とする △ABC の重心 G の位置ベクトル $\vec{g}$ は

$$\vec{g}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$$

1 4点 $A(\vec{a})$，$B(\vec{b})$，$C(\vec{c})$，$D(\vec{d})$ を頂点とする四面体ABCDにおいて，辺BCの中点を $M(\vec{m})$，辺ADの中点を $N(\vec{n})$ とする。



(1) 線分MNの中点を $P(\vec{p})$ とするとき，$\vec{p}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$ を用いて表せ。

(2) △BCDの重心を $G(\vec{g})$ とし，線分AGを3：1に内分する点を $H(\vec{h})$ とする。$\vec{h}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$ を用いて表せ。

Point Pickup

内分点・外分点・三角形の重心を表す位置ベクトル

3点 $A(\vec{a})$，$B(\vec{b})$，$C(\vec{c})$ に対して

線分ABを $m:n$ に内分する点Pの位置ベクトル $\vec{p}$ は

$$\vec{p}=\frac{n\vec{a}+m\vec{b}}{m+n}$$

線分ABを $m:n$ に外分する点Qの位置ベクトル $\vec{q}$ は

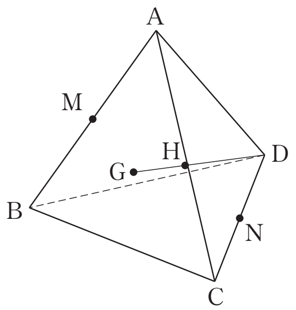
$$\vec{q}=\frac{-n\vec{a}+m\vec{b}}{m-n}=\frac{n\vec{a}-m\vec{b}}{-m+n}$$

△ABCの重心Gの位置ベクトル $\vec{g}$ は

$$\vec{g}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$$

第 6 講　PART1 確認問題

4点 $A(\vec{a})$, $B(\vec{b})$, $C(\vec{c})$, $D(\vec{d})$ を頂点とする四面体ABCDにおいて，辺ABの中点を $M(\vec{m})$，辺CDの中点を $N(\vec{n})$ とする。



1　線分MNの中点を $P(\vec{p})$ とするとき，$\vec{p}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$ を用いて表せ。

$$\vec{p}=\frac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}\vec{a}+\frac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}\vec{b}+\frac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}}\vec{c}+\frac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}}\vec{d}$$

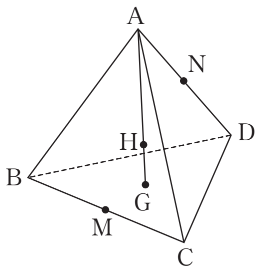
2　△ABCの重心を $G(\vec{g})$ とし，線分DGを3：2に内分する点を $H(\vec{h})$ とするとき，$\vec{h}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$ を用いて表せ。

$$\vec{h}=\frac{\boxed{ケ}}{\boxed{コ}}\vec{a}+\frac{\boxed{サ}}{\boxed{シ}}\vec{b}+\frac{\boxed{ス}}{\boxed{セ}}\vec{c}+\frac{\boxed{ソ}}{\boxed{タ}}\vec{d}$$

第 6 講　空間図形とベクトル

PART1 位置ベクトル

1 4点 A$(\vec{a})$，B$(\vec{b})$，C$(\vec{c})$，D$(\vec{d})$ を頂点とする四面体ABCDにおいて，辺BCの中点を M$(\vec{m})$，辺ADの中点を N$(\vec{n})$ とする。



(1) 線分MNの中点を P$(\vec{p})$ とするとき，$\vec{p}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$ を用いて表せ。

(2) △BCD の重心を G$(\vec{g})$ とし，線分AGを3：1に内分する点を H$(\vec{h})$ とする。$\vec{h}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$ を用いて表せ。

[解答]

(1) $\vec{m}=\dfrac{\vec{b}+\vec{c}}{2}$，$\vec{n}=\dfrac{\vec{a}+\vec{d}}{2}$

よって　$\vec{p}=\dfrac{\vec{m}+\vec{n}}{2}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\vec{b}+\vec{c}}{2}+\dfrac{\vec{a}+\vec{d}}{2}\right)=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{4}$

(2) $\vec{g}=\dfrac{\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{3}$

よって　$\vec{h}=\dfrac{\vec{a}+3\vec{g}}{3+1}=\dfrac{1}{4}\left(\vec{a}+3\cdot\dfrac{\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{3}\right)=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{4}$

第 6 講 PART1 確認問題 解答

1 **[正解]** ア：1，イ：4，ウ：1，エ：4，オ：1，カ：4，
キ：1，ク：4

[解説]

M，N はそれぞれ辺 AB，辺 CD の中点であるから

$$\vec{m}=\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2},\quad \vec{n}=\frac{\vec{c}+\vec{d}}{2}$$ [A]

よって，点 P は線分 MN の中点であるから

$$\vec{p}=\frac{\vec{m}+\vec{n}}{2}$$ [A]

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}+\frac{\vec{c}+\vec{d}}{2}\right)$$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}+\frac{1}{4}\vec{c}+\frac{1}{4}\vec{d}}$$

[A] 中点の位置ベクトル
2 点 $A(\vec{a})$，$B(\vec{b})$ を結ぶ線分 AB の中点 M の位置ベクトル $\vec{m}$ は

$$\vec{m}=\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$$

2 **[正解]** ケ：1，コ：5，サ：1，シ：5，ス：1，セ：5，
ソ：2，タ：5

[解説]

点 G は △ABC の重心であるから

$$\vec{g}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$$ [B]

よって，点 H は線分 DG を 3：2 に内分する点であるから

$$\vec{h}=\frac{2\vec{d}+3\vec{g}}{3+2}$$ [C]

$$=\frac{1}{5}\left(2\vec{d}+3\cdot\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}\right)$$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{5}\vec{a}+\frac{1}{5}\vec{b}+\frac{1}{5}\vec{c}+\frac{2}{5}\vec{d}}$$

[B] 三角形の重心の位置ベクトル
3 点 $A(\vec{a})$，$B(\vec{b})$，$C(\vec{c})$ を頂点とする △ABC の重心 G の位置ベクトル $\vec{g}$ は

$$\vec{g}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$$

[C] 内分点の位置ベクトル
2 点 $A(\vec{a})$，$B(\vec{b})$ を結ぶ線分 AB を $m：n$ に内分する点 P の位置ベクトル $\vec{p}$ は

$$\vec{p}=\frac{n\vec{a}+m\vec{b}}{m+n}$$